FÓRMULAS DO TRAÇO: UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA O CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA

Aurelio José Parreira, Msc.[1]
Emerson dos Santos Ribeiro, Esp.[2]

Resumo: Neste trabalho fazemos a transposição para o Ensino Médio e para os alunos em início de graduações de um método baseado nas Fórmulas do Traço para Cálculo da Matriz Inversa proposto por Andrade e Cunha [1].

Palavras-chave: Matriz Inversa. Polinômio Característico. Fórmulas do Traço. Ensino de Matemática.

1 Introdução

O tema Matrizes é um conteúdo tradicionalmente abordado no Ensino Médio e no início de algumas graduações. Em geral, este estudo segue a mesma ordem: uma apresentação do conceito, regras para construção de matrizes, definições gerais, operações com matrizes e por fim a Matriz Inversa. Ao apresentar o conceito de Matriz Inversa em geral apresenta-se também alguns exemplos e um método para obtenção de inversas de matrizes de ordem 2 conforme aponta Kraieski [2]. Alguns autores apresentam ainda um método baseado na Matriz Adjunta e Andrade e Cunha [1] apresentam um método baseado nas Fórmulas do Traço que neste trabalho transpomos para que seja aplicável na sala de aula do Ensino Médio ou dos primeiros semestres de graduações.

2 Preliminares

Alguns resultados importantes são necessários para a transposição do método proposto por Andrade e Cunha [1].

Definição 2.1 (Polinômio Característico) *O polinômio*

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n) \tag{1}$$

é chamado polinômio característico da matriz $A = (a_{ij})_n$.

Definição 2.2 (Traço) *O traço de uma matriz quadrada* A*, indicado por* $tr\boldsymbol{A}$*, é a soma dos elementos da diagonal principal de* A.

$$tr\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2}$$

[1]Instituto de Ensino Superior Presidente Tancredo Neves - IPTAN
E-mail: aurelio-parreira@ig.com.br
[2]Instituto de Ensino Superior Presidente Tancredo Neves - IPTAN
E-mail: rosemeluca@yahoo.com.br

Proposição 2.1 *Os coeficientes do polinômio característico de uma matriz* $\boldsymbol{A}$ *são obtidos recursivamente por*

$$\begin{aligned}
c_1 &= -tr\,\boldsymbol{A} \\
c_2 &= -2^{-1}[c_1 tr\,\boldsymbol{A} + tr\,\boldsymbol{A}^2] \\
c_3 &= -3^{-1}[c_2 tr\,\boldsymbol{A} + c_1 tr\,\boldsymbol{A}^2 + tr\,\boldsymbol{A}^3] \\
&. \\
&. \\
&. \\
c_n &= -n^{-1}[c_{n-1} tr\,\boldsymbol{A} + c_{n-2} tr\,\boldsymbol{A}^2 + ... + c_1 tr\,\boldsymbol{A}^{n-1} + tr\,\boldsymbol{A}^n].
\end{aligned}$$

Demonstração: A prova da Proposição 2.1 pode ser encontrada, por exemplo, em Silva [3]. □

Proposição 2.2 *Toda matriz quadrada anula o seu polinômio característico.*

Demonstração: A prova da Proposição 2.2 pode ser encontrada em [1]. □

3 Cálculo da Matriz Inversa

A seguir daremos um exemplo de aplicação da Proposição 2.1 calculando a inversa da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De (1) temos o polinômio característico desta matriz de ordem 3:

$$p(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3). \tag{3}$$

Utilizando a Proposição 2.2 encontramos

$$A^3 + c_1 A^2 + c_2 A + c_3 I = 0. \tag{4}$$

Multiplicando (4) por A^{-1} obtemos

$$A^{-1} = -c_3^{-1}(A^2 + c_1 A + c_2 I). \tag{5}$$

Em seguida calculamos as matrizes A^2 e A^3 e utilizando as Fórmulas do Traço, calculamos os coeficientes do polinômio como segue:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -tr\mathbf{A} = -1 \\
c_2 &= -2^{-1}[c_1 tr\mathbf{A} + tr\mathbf{A}^2] = -1 \\
c_3 &= -3^{-1}[c_2 tr\mathbf{A} + c_1 tr\mathbf{A}^2 + tr\mathbf{A}^3] = 1.
\end{aligned}$$

Substituindo estes coeficientes em (5) segue que

$$A^{-1} = -A^2 + A + I, \tag{6}$$

o que resulta, por substituição das matrizes A e A^2, na inversa de A,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Organizando o Método

Vamos nesta seção sistematizar o método para obtenção da Inversa exposto no exemplo da seção anterior para que o mesmo possa ser utilizado sistematicamente em sala de aula. Primeiramente faz-se necessário que o professor apresente as definições e proposições constantes em nossas Preliminares respeitando em sua linguagem a maturidade matemática de seus alunos. Portanto o rigor matemático nesta exposição deve ser dosado para que não permita ambiguidades mas também não desestimule os alunos com detalhes que não sejam essenciais neste primeiro contato com o método.
Em seguida ele apresenta o método que consiste em:

- Escrever o Polinômio Característico da Matriz **A**.
- Substituir a matriz **A** no polinômio característico e igualá-lo a zero.
- Multiplicar a equação anterior pela Inversa da matriz **A**.
- Calcular as potências da matriz **A** que aparecem na equação anterior.
- Calcular os coeficientes do polinômio característico pelas Fórmulas do Traço.
- Substituir os valores dos coeficientes e das potências da matriz **A** na última equação obtida para encontrar a Inversa da matriz **A**.

Feito isto e após certificar-se que os alunos compreenderam o método é hora de fixar este procedimento com alguns exemplos. É importante que o professor peça a seus alunos que apliquem o método em algumas matrizes. Portanto deixamos abaixo as matrizes B, C e D para que possam ser utilizadas nesta verificação.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5 Considerações Finais

Os resultados apresentados neste trabalho podem ser utilizados na busca de melhor desempenho no ensino de Matemática, particularmente no Ensino Médio e nas cadeiras iniciais de Matemática de cursos superiores. Perceba, ainda, que o intuito deste trabalho, era elucidar, o que Andrade [1] fez, de modo que professores em sala de aula também se beneficiem da pesquisa matemática a fim de responder melhor as indagações de seus alunos e sejam motivados a buscar novas ferramentas matemáticas em sua prática diária. Particularmente no que diz respeito ao ensino do tema Matriz Inversa acreditamos que a aplicação do método aqui exposto contribuirá em muito para o aperfeiçoamento matemático de nossos jovens.

Referências

[1] ANDRADE, M. S.; CUNHA, C. A. R., *Fórmulas do Traço e o Cálculo de Matrizes Inversas*. Disponível em: <http://www.ufsj.edu.br/profmat>. Acesso em: 28 mar. 2013.

[2] KRAIESKI, P., *Abordagem de Matrizes no Ensino Médio: uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações*. Trabalho de Conclusão do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, UFSC, 1999.

[3] SILVA, R. R., *The Trace Formulas Yield the Inverse Metric.*. Journal of Mathematical Physics, 39, 6206, (1998).